ГЛАВА 4

СТАЦИОНАРНЫЕ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Формализованы понятия, стационарности и эргодичности гиперслучайных функций. Предложены различные характеристики, описывающие стационарные и эргодические гиперслучайные функции. Исследованы свойства этих характеристик. Разработаны спектральные методы описания стационарных гиперслучайных функций.

4.1. Стационарные гиперслучайные функции

Гиперслучайную функцию $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$, где $X(t)/g$ – случайная функция при условии g, назовем *стационарной в узком смысле* (*строго*), если границы ее L-мерных распределений при любом L зависят только от длительности интервалов $t_2 - t_1, \ldots, t_L - t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t. *Гиперслучайные функции,* не относящиеся к этим функциям, будем называть *нестационарными в узком смысле.*

Свойства стационарной гиперслучайной функции подобны свойствам стационарной случайной функции: границы многомерной функции распределения, многомерные плотности распределения границ, многомерные характеристические функции границ не зависят от смещения по t. Кроме того, перечисленные одномерные характеристики не зависят от аргумента t, а двумерные характеристики зависят от разности $\tau = t_2 - t_1$ значений аргумента t, т.е.

$$f_{Sx}(x;t) = f_{Sx}(x), \qquad f_{Ix}(x;t) = f_{Ix}(x),$$

$$f_{Sx}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{Sx}(x_1, x_2; \tau),$$

$$f_{Ix}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{Ix}(x_1, x_2; \tau).$$

Моментные функции границ стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ обладают следующими свойствами: математические ожидания границ и дисперсии границ постоянны ($m_{Sx}(t) = m_{Sx}$, $m_{Ix}(t) = m_{Ix}$, $D_{Sx}(t) = D_{Sx}$, $D_{Ix}(t) = D_{Ix}$), а корреляционные функции границ

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)], \; K_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)],$$

ковариационные функции границ

$$R_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[(X(t_1) - m_{Sx})(X(t_2) - m_{Sx})],$$

$$R_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[(X(t_1) - m_{Ix})(X(t_2) - m_{Ix})]$$

и нормированные ковариационные функции границ

$$r_{Sx}(t_1, t_2) = \frac{R_{Sx}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{Sx}(t_1)D_{Sx}(t_2)}}, \; r_{Ix}(t_1, t_2)\frac{R_{Ix}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{Ix}(t_1)D_{Ix}(t_2)}}$$

не зависят от положения интервала $\tau = t_2 - t_1$ на оси t:

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = K_{Sx}(\tau), \qquad K_{Ix}(t_1, t_2) = K_{Ix}(\tau),$$

$$R_{Sx}(t_1, t_2) = R_{Sx}(\tau), \qquad R_{Ix}(t_1, t_2) = R_{Ix}(\tau),$$

$$r_{Sx}(\tau) = R_{Sx}(\tau) / D_{Sx}, \qquad r_{Ix}(\tau) = R_{Ix}(\tau) / D_{Ix}.$$

Гиперслучайную функцию $X(t)$ *назовем стационарной в широком смысле*, если математические ожидания ее границ постоянны $(m_{Sx}(t) = m_{Sx}$, $m_{Ix}(t) = m_{Ix})$, а корреляционные функции границ зависят только от разности значений аргумента t:

$$K_{Sx}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)X(t_2)] = K_{Sx}(\tau),$$

$$K_{Ix}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)X(t_2)] = K_{Ix}(\tau).$$

Гиперслучайные функции, стационарные в узком смысле, стационарны и в широком. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Две *гиперслучайные функции* $X(t)$ и $Y(t)$ назовем *совместно стационарно связанными в широком смысле,* если математические ожидания их границ постоянны, а их взаимные корреляционные функции границ инвариантны к смещению вдоль оси t:

$$K_{Sxy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_S[X(t_1)Y(t_2)] = K_{Sxy}(\tau),$$

$$K_{Ixy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}_I[X(t_1)Y(t_2)] = K_{Ixy}(\tau).$$

Отметим, что стационарность гиперслучайных функций в широком смысле не гарантирует их совместную стационарную связанность в широком смысле.

Ковариационные функции границ и нормированные ковариационные функции границ вещественных стационарных гиперслучайных функций $X(t)$, $Y(t)$ обладают следующими свойствами:

1) $|R_{Sx}(\tau)| \le D_{Sx}$, $|r_{Sx}(\tau)| \le 1$, $|R_{Ix}(\tau)| \le D_{Ix}$, $|r_{Ix}(\tau)| \le 1$;

2) максимумы ковариационных функций границ и нормированных ковариационных функций границ гиперслучайной функции имеют место при $\tau = 0$;

3) функции $R_{Sx}(\tau)$, $R_{Ix}(\tau)$, $r_{Sx}(\tau)$, $r_{Ix}(\tau)$ – четные;

4) $R_{Sxy}(\tau) = R_{Syx}(-\tau)$, $R_{Ixy}(\tau) = R_{Iyx}(-\tau)$, $r_{Sxy}(\tau) = r_{Syx}(-\tau)$, $r_{Ixy}(\tau) = r_{Iyx}(-\tau)$, где $R_{Sxy}(\tau)$, $R_{Ixy}(\tau)$ – взаимные

ковариационные функции границ, $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$ – нормированные взаимные ковариационные функции границ: $r_{Sxy}(\tau)=\dfrac{R_{Sxy}(\tau)}{D_{Sxy}}$, $r_{Ixy}(\tau)=\dfrac{R_{Ixy}(\tau)}{D_{Ixy}}$, $D_{Sxy}=R_{Sxy}(0)$, $D_{Ixy}=R_{Ixy}(0)$.

Гиперслучайную функцию $X(t)=\{X(t)/g\in G\}$ назовем *стационарной в узком смысле при всех условиях* $g\in G$, если при всех g условные ее L-мерные распределения при любом L зависят только от длительности интервалов $t_2-t_1,...,t_L-t_1$ и не зависят от положения этих интервалов на оси t.

Гиперслучайную функцию $X(t)$ назовем *стационарной в широком смысле при всех условиях* $g\in G$, если при любом фиксированном условии g условное математическое ожидание $m_{x/g}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x;t/g)\mathrm{d}x$ не зависит от аргумента t ($m_{x/g}(t)=m_{x/g}$), а условная корреляционная функция

$$K_{x/g}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

зависит лишь от разности значений аргумента t и условия g: $K_{x/g}(t_1,t_2)=K_{x/g}(\tau)$.

Отметим, что при этом условная ковариационная функция

$$R_{x/g}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_{x/g})(x_2-m_{x/g})\times$$
$$\times f(x_1,x_2;t_1,t_2/g)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

также зависит только от τ и g.

Нетрудно убедиться, что границы математического ожидания

$$m_{sx}(t)=\sup_{g\in G} m_{x/g}(t),\ m_{ix}(t)=\inf_{g\in G} m_{x/g}(t)$$

стационарной в широком смысле при всех условиях g гиперслучайной функции не зависят от времени t, т.е. $m_{sx}(t) = m_{sx}$, $m_{ix}(t) = m_{ix}$, а границы корреляционной функции

$$K_{sx}(\tau) = \sup_{g \in G} K_{x/g}(\tau), \; K_{ix}(\tau) = \inf_{g \in G} K_{x/g}(\tau)$$

и границы ковариационной функции

$$R_{sx}(\tau) = \sup_{g \in G} R_{x/g}(\tau), \; R_{ix}(\tau) = \inf_{g \in G} R_{x/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Гиперслучайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ назовем совместно стационарно связанными при всех условиях g, если условные математические ожидания этих функций $m_{x/g}(t)$, $m_{y/g}(t)$ не зависят от аргумента t ($m_{x/g}(t) = m_{x/g}$, $m_{y/g}(t) = m_{y/g}$), а условная взаимно-корреляционная функция

$$K_{xy/g}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y; t_1, t_2 / g) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$K_{xy/g}(t_1, t_2) = K_{xy/g}(\tau).$$

При этом условная взаимно-ковариационная функция

$$R_{xy/g}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x/g})(y - m_{x/g}) \times$$

$$\times f(x, y; t_1, t_2 / g) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

также инвариантна к смещению вдоль оси t:

$$R_{xy/g}(t_1, t_2) = R_{xy/g}(\tau).$$

Нетрудно убедиться, что границы взаимно-корреляционной функции

$$K_{sxy}(\tau) = \sup_{g \in G} K_{xy/g}(\tau), \;\; K_{ixy}(\tau) = \inf_{g \in G} K_{xy/g}(\tau)$$

и границы взаимно-ковариационной функции

$$R_{sxy}(\tau) = \sup_{g \in G} R_{xy/g}(\tau), \ \ R_{ixy}(\tau) = \inf_{g \in G} R_{xy/g}(\tau)$$

зависят только от τ.

Следует обратить внимание, что понятия стационарной в широком смысле гиперслучайной функции и функции, стационарной в широком смысле при всех условиях, – разные понятия. Общими для них являются бесконечная длительность реализаций и вариантность к сдвигу определенных (при этом разных) характеристик.

4.2. Спектральное описание гиперслучайных функций

Спектральное представление гиперслучайных функций в ряде случаев существенно облегчает их анализ. В первую очередь это касается функций, обладающих свойством стационарности.

Назовем *спектральными плотностями мощности верхней и нижней границ* (*энергетическими спектрами границ*) стационарной гиперслучайной функции $X(t)$ функции $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$, связанные с корреляционными функциями границ $K_{Sx}(f)$, $K_{Ix}(f)$ следующими соотношениями:

$$S_{Sxx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Sx}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$S_{Ixx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Ix}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$K_{Sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Sxx}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f,$$

$$K_{Ix}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ixx}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f.$$

Спектральные плотности мощности границ обладают свойствами, характерными для спектральной плотности мощности случайного процесса: энергетические спектры (вне зависимости от того является ли функция $X(t)$ вещественной или комплексной) действительны и неотрицательны, т.е. $S_{Sxx}(f) \geq 0$, $S_{Ixx}(f) \geq 0$; спектральные плотности мощности границ действительной гиперслучайной функции $X(t)$ четные, т.е. $S_{Sxx}(f) = S_{Sxx}(-f)$, $S_{Ixx}(f) = S_{Ixx}(-f)$ (это следует из того, что корреляционные функции границ стационарных гиперслучайных функций четные).

Назовем *гиперслучайным белым шумом* стационарную гиперслучайную функцию $N(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями границ, у которой спектральные плотности мощности границ представляют собой постоянные величины, т.е.

$$S_{Snn} = \frac{N_S}{2}, \; S_{Inn} = \frac{N_I}{2},$$

где N_S, N_I – константы.

Нетрудно убедиться, что корреляционные функции границ гиперслучайного белого шума описываются с помощью δ-функции:

$$K_{Sn}(\tau) = \frac{N_S}{2}\delta(\tau), \quad K_{In}(\tau) = \frac{N_I}{2}\delta(\tau).$$

Заметим, что этим же выражением описываются и ковариационные функции границ гиперслучайного белого шума.

Следует обратить внимание на то, что при определении гиперслучайного белого шума, так же, как и при определении случайного белого шума, не использованы понятия гауссовости и независимости сечений. Это означает, что гиперслучайный белый шум может быть негауссовским и с зависимыми (в том смысле, как это понимается в теории гиперслучайных явлений) сечениями.

Метод спектрального описания гиперслучайных функций допускает обобщение на случай стационарно связанных гиперслучайных функций.

Взаимными спектральными плотностями мощности границ двух стационарно связанных гиперслучайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ будем называть детерминированные функции $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$, определяемые как преобразование Фурье взаимных корреляционных функций границ $K_{Sxy}(\tau)$ и $K_{Ixy}(\tau)$:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Sxy}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\dot{S}_{Ixy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{Ixy}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Взаимные корреляционные функции границ связаны с взаимными спектральными плотностями мощности границ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{Sxy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Sxy}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f,$$

$$K_{Ixy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{Ixy}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f.$$

В отличие от спектральных плотностей мощности границ одной гиперслучайной функции, взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$ и $\dot{S}_{Ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями. Кроме того, они не являются четными, однако обладают свойствами эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{Sxy}(f) = S^{*}_{Syx}(f),$$

$$\dot{S}_{Ixy}(f) = S^{*}_{Iyx}(f).$$

Нетрудно убедиться, что взаимные спектральные плотности мощности границ $\dot{S}_{Sxy}(f)$, $\dot{S}_{Ixy}(f)$ функций $X(t)$ и $Y(t)$

связаны со спектральными плотностями мощности границ $S_{Sxx}(f)$, $S_{Ixx}(f)$ и $S_{Syy}(f)$, $S_{Iyy}(f)$ этих функций следующими неравенствами:

$$\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2 \le S_{Sxx}(f)S_{Syy}(f),$$

$$\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2 \le S_{Ixx}(f)S_{Iyy}(f).$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ можно использовать *функции частотной когерентности границ* $\gamma^2_{Sxy}(f)$, $\gamma^2_{Ixy}(f)$, определяемые подобно функции частотной когерентности двух случайных функций:

$$\gamma^2_{Sxy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Sxy}(f)\right|^2}{S_{Sxx}(f)S_{Syy}(f)},$$

$$\gamma^2_{Ixy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{Ixy}(f)\right|^2}{S_{Ixx}(f)S_{Iyy}(f)}.$$

Функции частотной когерентности границ лежат в интервале [0,1]. Если функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированы, то для всех $f \ne 0$ $\gamma^2_{Sxy}(f) = \gamma^2_{Ixy}(f) = 0$, если же они линейно связаны, то $\gamma^2_{Sxy}(f) = \gamma^2_{Ixy}(f) = 1$. Функции частотной когерентности границ подобны нормированным ковариационным функциям границ $r_{Sxy}(\tau)$, $r_{Ixy}(\tau)$, однако в отличие от последних, они характеризуют не только линейные, но и нелинейные связи между гиперслучайными функциями.

Мгновенным спектром гиперслучайной функции $X(t) = \{X(t)/g \in G\}$ при условии g будем называть комплексную гиперслучайную функцию $\dot{S}_{x/g}(f)$, связанную с наблюдаемым при условии g процессом $X(t)/g$ преобразованием Фурье:

$$\dot{S}_{x/g}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)/g\exp(-\mathrm{j}2\pi ft)\mathrm{d}t .$$

Мгновенный спектр стационарной при всех условиях g гиперслучайной функции обладает свойствами, подобными свойствам мгновенного спектра стационарной в широком смысле случайной функции. В частности, условное математическое ожидание $m_{\dot{S}_{x/g}}(f)$ мгновенного спектра гиперслучайной функции $X(t)$ связано с условным математическим ожиданием $m_{x/g}$ функции $X(t)$ выражением $m_{\dot{S}_{x/g}}(f)=m_{x/g}\delta(f)$.

Определим *условный спектр мощности* $S_{xx/g}(f)$ функции $X(t)$ как преобразование Фурье условной корреляционной функции $K_{x/g}(\tau)$:

$$S_{xx/g}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} K_{x/g}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

где $K_{x/g}(\tau)$ связана с $S_{xx/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{x/g}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx/g}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f .$$

Нетрудно показать, что *условную корреляционную функцию мгновенного спектра* $K_{\dot{S}_x/g}(f_1,f_2)$ стационарной при всех условиях гиперслучайной функции $X(t)$ можно представить следующим образом:

$$K_{\dot{S}_x/g}(f_1,f_2)=S_{xx/g}(f_1)\delta(f_2-f_1) . \tag{4.1}$$

Из выражения (4.1) следует, что мгновенный спектр стационарной гиперслучайной функции не является стационарной функцией; отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, ортогональны; при нулевых математических ожиданиях границ отсчеты мгновенного спектра, соответствующие разным частотам, не только ортогональны, но и некоррелированы.

Отметим, что условный спектр мощности $S_{xx/g}(f)$ связан с условным мгновенным спектром $\dot{S}_{x_T/g}(f)$, задаваемым на интервале T, следующим соотношением:

$$S_{xx/g}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)].$$

Границы энергетического спектра можно определить следующим образом:

$$S_{sxx}(f) = \sup_{g\in G} S_{xx/g}(f), \; S_{ixx}(f) = \inf_{g\in G} S_{xx/g}(f).$$

Нетрудно убедиться, что границы энергетического спектра стационарной гиперслучайной функции связаны с ее мгновенным спектром при условии g соотношениями

$$S_{sxx}(f) = \lim_{T\to\infty} \sup_{g\in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)],$$

$$S_{ixx}(f) = \lim_{T\to\infty} \inf_{g\in G} \frac{1}{T} \mathrm{M}[\dot{S}_{x_T/g}(f) S^*_{x_T/g}(f)].$$

Назовем *гиперслучайным белым шумом при всех условиях* стационарную при всех условиях гиперслучайную функцию $N(t)$, у которой условное математическое ожидание равно нулю, а условный спектр мощности не зависит от частоты, т.е $S_{nn/g} = \frac{N_g}{2}$, где N_g – константа, зависящая в общем случае от условия g.

Условная корреляционная функция такого шума представляет собой δ-функцию: $K_{n/g}(\tau) = \frac{N_g}{2}\delta(\tau)$. Этим же выражением описывается и его ковариационная функция.

Заметим, что гиперслучайный белый шум при всех условиях может быть негауссовским.

Определим *условный взаимный спектр мощности* $\dot{S}_{xy/g}(f)$ *стационарных при всех условиях гиперслучайных функций* $X(t)$ и $Y(t)$ как преобразование Фурье условной взаимно-корреляционной функции $K_{xy/g}(\tau)$:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy/g}(\tau)\exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau,$$

где $K_{xy/g}(\tau)$ связана с $\dot{S}_{xy/g}(f)$ обратным преобразованием Фурье:

$$K_{xy/g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{xy/g}(f)\exp(\mathrm{j}2\pi f\tau)\mathrm{d}f .$$

Границы взаимного энергетического спектра можно определить следующим образом:

$$\dot{S}_{sxy}(f) = \sup_{g\in G} \dot{S}_{xy/g}(f), \ \dot{S}_{ixy}(f) = \inf_{g\in G} \dot{S}_{xy/g}(f).$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ и границы взаимного энергетического спектра $\dot{S}_{sxy}(f)$ и $\dot{S}_{ixy}(f)$ в общем случае не являются вещественными функциями, не являются четными и обладают свойством эрмитовой сопряженности:

$$\dot{S}_{xy/g}(f) = S^{*}_{yx/g}(f), \ \dot{S}_{sxy}(f) = S^{*}_{syx}(f), \ \dot{S}_{ixy}(f) = S^{*}_{iyx}(f).$$

Для характеристики степени и характера связи между гиперслучайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ можно использовать *границы функции частотной когерентности* $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$, определяемые как

$$\gamma^2_{sxy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f)S_{syy}(f)}, \ \gamma^2_{ixy}(f) = \frac{\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2}{S_{sxx}(f)S_{syy}(f)}.$$

Следует обратить внимание, что условный взаимный спектр мощности $\dot{S}_{xy/g}(f)$ связан с условными взаимными спектрами мощности $S_{xx/g}(f)$ и $S_{yy/g}(f)$ следующим неравенством:

$$\left|\dot{S}_{xy/g}(f)\right|^2 \le S_{xx/g}(f) S_{yy/g}(f),$$

однако границы взаимной спектральной плотности мощности $\dot{S}_{sxy}(f)$, $\dot{S}_{ixy}(f)$ не имеют подобной связи с границами спектральных плотностей мощности $S_{sxx}(f)$, $S_{ixx}(f)$ и $S_{syy}(f)$, $S_{iyy}(f)$, т.е. не всегда справедливы неравенства

$$\left|\dot{S}_{sxy}(f)\right|^2 \le S_{sxx}(f) S_{syy}(f),$$

$$\left|\dot{S}_{ixy}(f)\right|^2 \le S_{ixx}(f) S_{iyy}(f).$$

Поэтому границы функции частотной когерентности $\gamma^2_{sxy}(f)$, $\gamma^2_{ixy}(f)$ могут принимать значения, превышающие единицу.

4.3. Сходимость гиперслучайных величин и функций

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие сходимости последовательности гиперслучайных величин.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных величин $\mathrm{X} = \{X_1, ..., X_N\}$ и гиперслучайная величина X. Для всех $X_1, \ldots, X_N$ и X определены множество условий G и условные функции распределения

$$F_1(x/g), \ldots, F_N(x/g),\ F(x/g)\ (g \in G).$$

Тогда последовательность X

1) *сходится к* X *по функции распределения*, если при всех условиях $g \in G$ в каждой точке x, где $F(x/g)$ непрерывна,

$$F_N(x/g) \to F(x/g) \text{ при } N \to \infty;$$

2) *сходится к* X *в среднеквадратическом*, если при всех условиях $g \in G$ условные математические ожидания

$$\mathrm{M}[\left|X_N - X\right|^2 / g]$$

стремятся к нулю при $N \to \infty$, т. е при фиксированных условиях g случайная последовательность X/g сходится в среднеквадратическом к случайной величине X / g. При такой сходимости можно писать

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ X_N = X\,;$$

3) *сходится к* X *почти наверное*, если при всех условиях $g \in G$ условная вероятность $P(X_N \to X / g)$ равна единице при $N \to \infty$, т. е. при фиксированных условиях g случайная последовательность X/g сходится *с вероятностью единица* к случайной величине X / g. При такой сходимости можно писать

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X\,;$$

4) *сходится к* X *по вероятности*, если

$$P(\left|X_N - X\right| > \varepsilon/g)$$

стремится к нулю при всех условиях $g \in G$, $\varepsilon > 0$ и $N \to \infty$.

Отметим, что понятия сходимости последовательности гиперслучайных величин допускают обобщения на последовательность гиперслучайных функций.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных функций

$$\mathrm{X}(t) = \{X_1(t), ..., X_N(t)\}$$

и гиперслучайная функция $X(t)$ $(t \in T)$, для которых определены условные функции распределения

$$F_1(x; t / g), ..., F_N(x; t / g)\,,\ F(x; t / g)\,.$$

Тогда последовательность $\mathrm{X}(t)$:

1) *сходится к* $X(t)$ *в среднеквадратическом*, если для всех $t \in T$ и всех $g \in G$

$$\mathrm{M}[|X_N(t) - X(t)|^2 / g] \to 0$$

при $N \to \infty$, т.е. $\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_N(t) = X(t)$;

2) *сходится к* $X(t)$ *почти наверное*, если для всех $t \in T$ и всех $g \in G$

$$P(X_N(t) \to X(t) / g) = 1$$

при $N \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} X_N(t) = X(t)$.

Сходимость последовательности гиперслучайных функций по функции распределения и *по вероятности* можно определить аналогично сходимости последовательности гиперслучайных величин.

4.4. Эргодические гиперслучайные функции

Некоторые гиперслучайные функции обладают специфическим свойством эргодичности. Рассмотрим гиперслучайную функцию $X(t)$, допускающую разложение на отдельные случайные функции, определенные на непересекающихся интервалах T_g длительностью T, на которых условия g сохраняются неизменными ($g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Пусть $X_g(t)$ – фрагменты функции $X(t)$, соответствующие интервалам T_g и приведенные к интервалу $[-T/2, T/2)$:

$$X_g(t - T(g+0,5)) = \begin{cases} X(t), & \text{если} \quad t \in T_g, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin T_g. \end{cases}$$

Функция $X_g(t)$ при фиксированных условиях представляет собой случайную функцию аргумента $t \in [-T/2, T/2)$. Множество всех таких функций при неопределенных условиях ($g = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) образует гиперслучайную функцию

$Y(t) = \{X_g(t), \quad g = 0, \pm 1, \ldots\}$. Положим, что при $T \to \infty$ гиперслучайная функция $Y(t)$ обладает свойством стационарности для всех условий g.

Любая функция $\varphi(Y(t_1), ..., Y(t_L))$ от множества значений гиперслучайной функции $Y(t)$ в фиксированных точках $t_1, \ldots, t_L \in [-T/2, T/2)$ является гиперслучайной величиной. Если эта функция $\varphi(Y(t_1), ..., Y(t_L))$ интегрируема, то при переменном T среднее ее значение

$$\bar{m}_\varphi(T) = \bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(Y(t_1), ..., Y(t_L))] = \\ = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(Y(t_1 + t), ..., Y(t_L + t)) \mathrm{d}t \qquad (4.2)$$

представляет собой гиперслучайную функцию, которую можно трактовать как последовательность гиперслучайных величин.

Гиперслучайную функцию $X(t)$, стационарную при всех условиях, будем называть *эргодической*, если при всех $g \in G$ и $T \to \infty$ среднее $\bar{m}_\varphi(T)$ функции $\varphi(Y(t_1), ..., Y(t_L))$ почти наверное сходится к математическому ожиданию $m_\varphi = \mathrm{M}[\varphi(Y(t_1), ..., Y(t_L))]$:

$$\lim_{T \to \infty} \bar{m}_\varphi(T) = m_\varphi. \qquad (4.3)$$

Иными словами, ее гиперслучайную функцию $X(t)$ можно разложить в ряд эргодических случайных функций $X_g(t)$:

$$X(t) = \lim_{T \to \infty} \sum_g X_g(t - T(g + 0,5)).$$

В этом случае среднее значение $\bar{\mathrm{M}}_T[\varphi(y(t_1), ..., y(t_L))]$ функции $\varphi(y(t_1), ..., y(t_L))$, рассчитанное по произвольно выбранной реализации $x(t)$ гиперслучайного процесса $X(t)$ на основе усреднения по времени t, описывает с вероятностью, равной единице, среднее, рассчитанное для функции

$\varphi(Y(t_1),...,Y(t_L))$ на основе усреднения множества реализаций рассматриваемого процесса $X(t)$.

Когда условия постоянны, гиперслучайный процесс вырождается в случайный. Тогда из выражений (4.2), (4.3) следует общепринятое определение стационарного эргодического случайного процесса [2, 16].

Назовем *границами среднего реализации* $x(t)$ *эргодической гиперслучайной функции* $X(t)$ следующие функции:

$$\bar{m}_{sx_T} = \sup_{g\in G} \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \bar{m}_{ix_T} = \inf_{g\in G} \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (4.4)$$

границами корреляционной функции реализации – функции

$$\bar{K}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g\in G} \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t+\tau)\, x_g(t)\mathrm{d}t\,,$$

$$\bar{K}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g\in G} \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t+\tau)\, x_g(t)\mathrm{d}t\,,$$

а *границами ковариационной функции реализации* – функции

$$\bar{R}_{sx_T}(\tau) = \sup_{g} \frac{1}{T} \int_{T_g} [x_g(t+\tau) - \bar{m}_{x_T/g}][x_g(t) - \bar{m}_{x_T/g}]\mathrm{d}t,$$

$$\bar{R}_{ix_T}(\tau) = \inf_{g} \frac{1}{T} \int_{T_g} [x_g(t+\tau) - \bar{m}_{x_T/g}][x_g(t) - \bar{m}_{x_T/g}]\mathrm{d}t,$$

где $\bar{m}_{x_T/g} = \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t)\,\mathrm{d}t$.

При $T\to\infty$ границы среднего реализации $\bar{m}_{sx}$, $\bar{m}_{ix}$ почти наверное совпадают с границами математического ожидания: $\bar{m}_{sx} = m_{sx}$, $\bar{m}_{ix} = m_{ix}$, границы корреляционной функции реализации $\bar{K}_{sx}(\tau)$, $\underline{K}_{ix}(\tau)$ почти наверное совпадают с границами корреляционной функции $K_{sx}(\tau)$, $K_{ix}(\tau)$, границы ковариационной функции реализации $\bar{R}_{sx}(\tau)$, $\underline{R}_{ix}(\tau)$ – с границами ковариационной функции $R_{sx}(\tau)$, $R_{ix}(\tau)$, а верхняя и нижняя границы дисперсии реализации $\bar{D}_{sx} = \bar{R}_{sx}(0)$, $\underline{D}_{ix} = \underline{R}_{ix}(0)$ почти наверное совпадают с границами дисперсии D_{sx}, D_{ix}.

Отметим, что так же, как и в теории вероятностей, для определения эргодической гиперслучайной функции $X(t)$ можно использовать другой тип сходимости границ усредненных значений функции: например, вместо сходимости почти наверное сходимость в среднеквадратическом.

Приведенные результаты допускают обобщения на многомерный случай. В частности, *границами взаимной корреляционной функции реализаций* $x(t)$, $y(t)$ эргодических гиперслучайных функций $X(t)$, $Y(t)$ можно назвать функции

$$\bar{K}_{sxy_T}(\tau) = \sup_g \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t+\tau)\, y_g(t) \mathrm{d}t,$$

$$\underline{K}_{ixy_T}(\tau) = \inf_g \frac{1}{T} \int_{T_g} x_g(t+\tau)\, y_g(t) \mathrm{d}t,$$

а *границами взаимной ковариационной функции* этих *реализаций* – функции

$$\bar{R}_{sxy_T}(\tau) = \sup_g \frac{1}{T} \int_{T_g} (x_g(t+\tau) - \bar{m}_{x_T/g})(y_g(t) - \bar{m}_{y_T/g}) \mathrm{d}t,$$

$$\underline{R}_{ixyT}(\tau) = \inf_g \frac{1}{T} \int_{T_g} (x_g(t+\tau) - \bar{m}_{x_T/g})(y_g(t) - \bar{m}_{y_T/g}) \mathrm{d}t.$$

При $T \to \infty$ границы взаимной корреляционной функции реализаций $\bar{K}_{sxy}(\tau)$, $\bar{K}_{ixy}(\tau)$ почти наверное совпадают с границами корреляционной взаимной функции $K_{sxy}(\tau)$, $K_{ixy}(\tau)$, а границы взаимной ковариационной функции реализаций $\bar{R}_{sxy}(\tau)$, $\bar{R}_{ixy}(\tau)$ почти наверное совпадают с границами взаимной ковариационной функции $R_{sxy}(\tau)$, $R_{ixy}(\tau)$.

Аналогичным образом могут быть определены и другие усредненные характеристики.